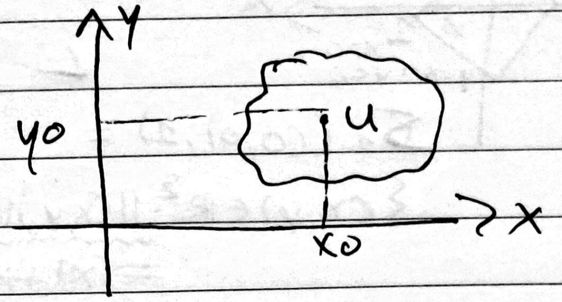
26/10/17

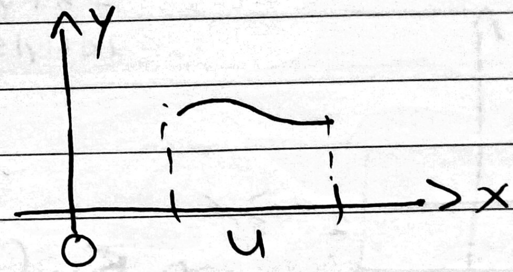
Παράδειγμα

$f: U_{\subset \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ $\boxed{n=2}$



$f: U_{\subset \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ $\boxed{n=1}$

$f(x)=$



Την προηγούμενη εβδομάδα είδαμε τις αλγεβρικές ~~[illegible]~~ ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$, σε τι αντιστοιχούν γεωμετρικά και τις έννοιες του εσ. γινόμενου

→ Ευκλείδια νόρμα → Ευκλείδια $\subset \mathbb{R}$

$\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$: $(\bar{x} \cdot \bar{x})^{1/2} = \|\bar{x}\|$ νόρμα

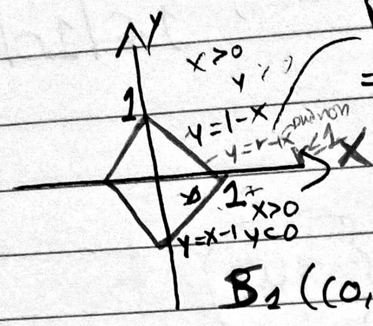
$(d(\bar{x}, \bar{y}) =)\ \|\bar{x} - \bar{y}\|$ απόσταση

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ εσ. γινόμενο ή [illegible]

Εκτός από την Ευκλείδια νόρμα $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}\bar{x}} = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2} = (= \|\bar{x}\|_p$ με $p=2)$ γνωρίζαμε και την

$(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} = \|\bar{x}\|_p$

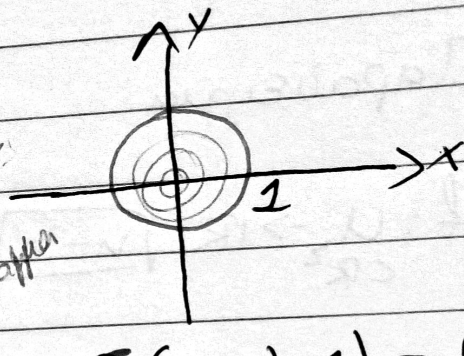
1 - νόρμα $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = (= \|\bar{x}\|_p$ με $p=1)$



$B_1((0,0),1)$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$\|(x,y)\|_1\leq 1\}$

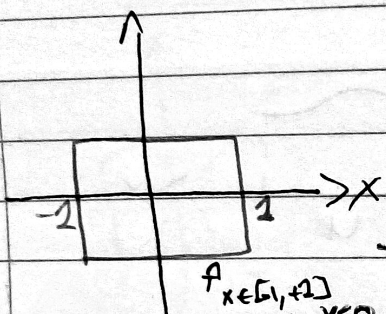
αν μόνο <1 θα είχα μόνο το μέσα το όχι περίγραμμα

$B_1((0,0),1) =$
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{\|(x,y)\|=1}\}$
$=|x|+|y|$
$=x+y=1$
$|x|+|y|\leq 1$



$B((0,0),1) = (x^2+y^2=1)$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \sqrt{x^2+y^2}=1\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1\}$
$r\leq 1$

απο x,y
απο 0
δια νορμα



$\Rightarrow B_\infty((0,0),1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \ \|(x,y)\|_\infty=1$
$=\max\{|x|,|y|\}\}$

Ορισμός : Δύο νόρμες $\|\ldots\|_a$, $\|\ldots\|_b$ $X\to\mathbb{R}$ ενός διαν. χώρου X ονομάζονται ισοδύναμες :
αν $\exists\ c, C>0$ $c\|\bar{x}\|_a\leq\|\bar{x}\|_b\leq C\|\bar{x}\|_a$
$\forall \bar{x}\in X$

Πρόταση : Η ευκλείδεια νόρμα $\|\bar{x}\|$ η ∞-νόρμα $\|\bar{x}\|_\infty$ και η 1-νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι, ανά δύο, ισοδύναμες. Ειδικότερα
$\|\bar{x}\|_\infty\leq\|\bar{x}\|_1\leq n\|\bar{x}\|_\infty$,

$$\|\bar{x}\|_\infty\leq\|\bar{x}\|\leq\sqrt{n}\,\|\bar{x}\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\bar{x}\|\leq\|\bar{x}\|_1\leq n\|\bar{x}\|$$

ευκλειδ νορμ 1 η ευκλειδ

Απόδειξη.

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\le \|\bar{x}\|_\infty} \le n\|\bar{x}\|_\infty$$

$$\|\bar{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|^2}_{\le \|\bar{x}\|_\infty^2} \le n\|\bar{x}\|_\infty^2$$

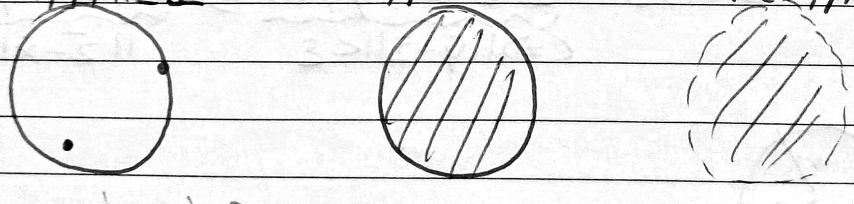
$$\Rightarrow \|\bar{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\bar{x}\|_\infty$$

Παρατήρηση: $\forall i = 1, \dots, n \quad |x_i| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|\bar{x}\|_1$

στα αθροίσματα αλλάζω το κάτω

Άσκηση: Αποδείξτε τις υπόλοιπες ανισότητες.

$\|(x,y)\| = 1$ $\qquad$ $\|(x,y)\| \le 1$ $\qquad$ $\|(x,y)\| < 1$



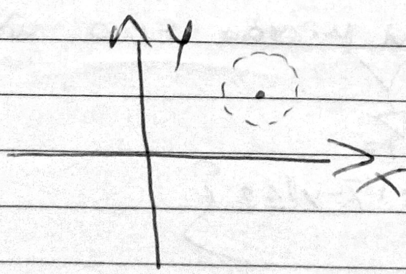
ανοιχτά σύνολα

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται
(a) ανοικτό, αν $\forall \bar{x} \in U \ \exists \ \varepsilon > 0 : \underbrace{B(\bar{x}, \varepsilon)}_{= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon\}} \subset U$

απόσταση y από το x

ανοιχτή μπάλα στο $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\bar{x}$, ακτίνας ε

Εδώ για $\boxed{n=2}$



κλειστό, αν $\mathbb{R}^n \setminus U$ ανοικτό.

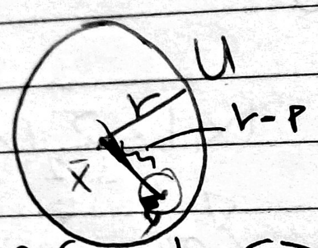
Πρόταση: Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη:

Έστω η ανοικτή μπάλα $\overbrace{B(\bar{x}, r)}^{U \text{ μεγ. μπάλα}}$, $r>0$ $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

$=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n \ \|\bar{y}-\bar{x}\|<r\}$ *

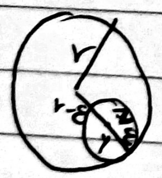
Θ.ν.δ.ο το σύνολο αυτό είναι ανοικτό.



Έστω $\bar{y}\in \underbrace{B(\bar{x},r)}_{=U} \Leftrightarrow \underbrace{\|y-x\|}_{p}<r \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 .\ \|\bar{y}-x\| = \underbrace{r-\varepsilon}_{p}$

$\Rightarrow$ (ισχυρισμός) $B(\bar{y},\varepsilon)\subset B(\bar{x},r)$

ισοδύναμα: Θ.ν.δ.ο $\underbrace{\bar{z}\in B(\bar{y},\varepsilon)}_{\Leftrightarrow\|\bar{y}-\bar{z}\|<\varepsilon} \Rightarrow \underbrace{\bar{z}\in B(\bar{x},r)}_{\|\bar{z}-\bar{x}\|<r}$



Πράγματι: $\|\bar{z}-\bar{x}\| \overset{\text{τριγ. ανισ}}{\leq} \underbrace{\|\bar{z}-\bar{y}\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{=r-\varepsilon} < r$

Άσκηση: ν.δ.ο Κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο

$\bar{B}(\bar{x},r)=$
$\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n: \|\bar{x}-\bar{y}\|\leq r\}$